UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA Y TECNOLOGIA

MANUAL DE EJERCICIOS

CURSO DE NIVELACIÓN ACADÉMICA PARA ALUMNOS DE NUEVO INGRESO

Tijuana, Baja California **Enero 2020**

Autores:

Dr. Alberto Hernández Maldonado

Dra. Daniela Mercedes Martínez Plata

Dr. Edgar Armando Chávez Moreno

Dr. Luis Ramón Siero González

Fecha de última actualización:

Diciembre de 2018

TÓPICOS SELECTOS DE MATEMÁTICAS

Contenido General: Elementos básicos de Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.

Objetivo: Reafirmar los conocimientos básicos de las matemáticas de los estudiantes de nuevo ingreso a la Facultad de Ciencias de la Ingeniería y Tecnología (FCITEC), para facilitar su integración a los cursos de nivel superior que requieran Matemáticas.

Misión del curso: Aumentar el número de estudiantes de nuevo ingreso que cuentan con habilidades matemáticas básicas, las cuales fundamentaran el trabajo académico durante su formación profesional, propiciando una mejor asimilación de la información proporcionada en los contenidos de las materias cursadas y en actividades académicas colaterales.

Visión del curso: Influir positivamente en la elevación de porcentaje de permanencia en la carrera y el índice de egreso de las carreras que ofrecen el FCITEC, así como incrementar la calidad académica de sus egresados.

I N T R O D U C C I Ó N

IMPORTANCIA DE ESTE CURSO

Nuestra institución ofrece carreras que están muy vinculadas al desarrollo económico de la localidad. De modo que están estrechamente relacionadas con la Ciencia y la Tecnología, tanto por el lado de la aplicación, implementación, diseño e innovación de equipo y procesos industriales.

Todas las Ingenierías que se ofrecen en el FCITEC implican la formación de profesionistas que requieren habilidades para el manejo y aplicación de las matemáticas, de acuerdo a cada especialidad. Así pues, dada la orientación de cada carrera, el estudio de las Matemáticas para todos los estudiantes del FCITEC resulta necesario, importante e ineludible.

En particular, las carreras de Ingeniería se sustentan principalmente en tres pilares que corresponden a las llamadas Ciencias Básicas: por un lado, las Matemáticas como materia común a todas; por el otro, la Física y la Química en diferentes contribuciones de acuerdo a la especialización de cada Ingeniería. Pero invariablemente las tres siempre están presentes. Esto se debe a que estas tres asignaturas describen los procesos naturales a cuya aplicación e innovación tecnológica se dedicarán los futuros ingenieros.

La Física y la Química nos describen procesos inmediatos y vitales relacionados con *la materia* y *la energí*a, los únicos dos componentes que conforman el universo. Hasta donde se conoce, en el espacio en que vivimos no existe nada que no pueda catalogarse en lo uno o lo otro o ambos.

Por lo tanto, un buen ingeniero debe comprender las leyes de la naturaleza, que se cumplen invariablemente, para conocer el rango de operación, manipulación y limitaciones naturales de sus proyectos, evaluar requerimientos materiales y energéticos, así como para ser capaz de prever resultados posibles.

En todo ello, las **Matemáticas, ciencia que estudia las cantidades, sus relaciones y sus propiedades**, resultan ineludibles: <u>un buen ingeniero no sólo debe conocer las leyes naturales que aplicará, sino también debe saber medir y calcular correctamente</u>. De hacerlo mal, sea cual sea su especialización, resulta un mal ingeniero y en tal caso no se alcanza el objetivo del proceso educativo tecnológico. Lo que es peor, un ingeniero deficientemente formado es un fracaso social, cultural y económico, no sólo para él sino para toda la sociedad. Pero en primera instancia para él mismo.

Se justifica entonces que en el FCITEC todas las carreras de Ingeniería contemplen en su retícula **Matemáticas**, todas con el mismo plan de estudios para todas las Ingenierías, además de otros cursos de Matemáticas, como Probabilidad y Estadística, y otras asignaturas de cada Ingeniería en particular que también requieren el uso de las Matemáticas.

El énfasis especial es en las materias de Física y Química, los otros dos pilares de las Ingenierías. Una mala preparación en Matemáticas inhabilita a los estudiantes a captar más allá de los conceptos básicos y prácticamente los hace incapaces de dominar las leyes fundamentales que rigen los procesos naturales, en los que se involucran los elementos de trabajo de un ingeniero: materia y energía.

Puede comprenderse, por tanto, que los estudiantes que optan por carreras de Ingeniería **deben tener habilidades matemáticas**. Si no es el caso, deben estar dispuestos a colaborar en el desarrollo de dichas habilidades.

Si el estudiante entiende esto, comprenderán que tienen en sus propias manos, **en su ánimo y en su buena disposición para aprender**, no sólo su éxito académico sino también su futuro profesional y económico... y de paso, por sus posibles futuras contribuciones a la tecnología mexicana.

La experiencia docente a nivel superior ha mostrado que los primeros semestres resultan cruciales en el buen desempeño y desarrollo académico de los estudiantes durante toda su carrera. En particular, y por la importancia que tiene para las Ingenierías, el dominio de las Matemáticas es muy decisivo para el aprovechamiento y éxito escolar.

Por otro lado, el conocimiento de un ingeniero se va dando estructuralmente. No se aprenden disciplinas separadas, aunque por cuestiones de implementación práctica así se presentan, sino que los contenidos de todas las materias se van entrelazando entre sí para formar una sola estructura de conocimiento. Es en la mente del estudiante donde se entrecruzan los conocimientos adquiridos durante su formación. La madurez intelectual hace que se asimile el conocimiento como uno sólo. No se da en una clase, en un día. Ni en un semestre. Se da a lo largo de toda la carrera profesional. En todo ese proceso, las Matemáticas persisten. Y continúan presentes en el desempeño de un Ingeniero.

Es importante tomar este curso en serio, de principio a fin. Es una buena oportunidad de reafirmar grupalmente lo que se supone que debías saber y probablemente no lo sabes, o lo que probablemente ya conocías y lo has olvidado. Y no es cualquier cosa: es Matemáticas, la materia que incluyen por igual todas las Ingenierías. La habilidad que debe desarrollar cualquier futuro ingeniero.

En este manual se pretende aclarar las dudas matemáticas que generalmente se presentan en las materias básicas de los primeros semestres.

Finalmente, una observaciones importantes para tu desarrollo académico **Haz las cosas por ti mismo** ¡te darás cuenta que no es lo mismo que verlas hacer! Sólo así aprenderás.

¡BIENVENIDOS A LA FCITEC!

Índice

Tabla de contenido.

Sección 1

ARITMÉTICA

Según la Real Académica Española, en su diccionario de la lengua española, la aritmética se define como *la parte de la matemática que estudia los números y las operaciones hechas con ellos*[1]. Con lo anterior en mente, es posible imaginar que los conceptos que se trabajarán en esta sección están orientados a describir y practicar las operaciones básicas con los números. Para facilitar el trabajo a continuación, te sugerimos que repases el concepto de números reales y su clasificación (enteros y racionales o fraccionarios).

1.1 Operaciones aritméticas fundamentales

1.1.1 Simplificación de fracciones.

Los números reales o fraccionarios son todos aquellos que se pueden representar como una división. En algunas ocasiones los números fraccionarios pueden simplificarse.

Ejemplo 1.1. Simplifique la fracción 2/4:

$$\frac{2}{4}=\frac{(1)(2)}{(2)(2)}=\frac{1}{2}$$

En el ejemplo 1.1, el denominador y numerador tienen como factor común a 2, por lo tanto, se puede factorizar. Es importante aclarar que no se eliminan, sino que se utiliza el concepto de la igualdad, es decir, 1 = 2/2, el cual es elemento neutro de la multiplicación.

Ejemplo 1.2. Simplifique la fracción 66/121:

$$\frac{66}{121}=\frac{(33)(2)}{(11)(11)}=\frac{(11)(3)(2)}{(11)(11)}=\frac{6}{11}$$

Ejercicio de práctica 1. Simplifique las siguientes fracciones.

a) $\frac{45}{50}=$

b) $\frac{15}{42}=$

c) $\frac{27}{42}=$

d) $\frac{189}{294}=$

e) $\frac{504}{112}=$

f) $\frac{90}{240}=$

g) $\frac{84}{108}=$

h) $\frac{36}{54}=$

i) $\frac{168}{108}=$

j) $\frac{66}{86}=$

1.1.2 Conversión de una fracción impropia a una fracción mixta

Para realizar esta conversión, se divide el numerador entre el denominador. Si el cociente es exacto, éste representa los enteros; si no es exacto, se añade al entero una fracción que tenga por numerador el residuo y por denominador el divisor.

Ejemplo 1.3. Convertir $\frac{15}{2}$ en fracción mixta:

$$2\overset{\displaystyle 7}{\overline{)15}}\text{, residuo} = 1$$

Por lo tanto, para construir la fracción mixta, se toman los enteros (7) y se acompañan de una nueva fracción construida por el residuo de la división como numerador y el denominador de la fracción original, es decir:

$$\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

1.1.3 Conversión de una fracción mixta a una fracción impropia

En este caso, se multiplica el denominador de la fracción mixta por la parte entera y se suma al numerador, el resultado se coloca en el numerador y se mantiene el mismo denominador de la fracción mixta.

Ejemplo 1.4. Convertir $5\frac{2}{3}$ a fracción impropia:

$$5\frac{2}{3} = \frac{(3)(5)+2}{3} = \frac{17}{3}$$

Ejercicio de práctica 2. De las siguientes fracciones identifique cuál es impropia y cuál es mixta y convierta cada una a su contraparte de acuerdo a la identificación hecha.

a) $2\frac{3}{9}$

b) $\frac{24}{3}$

c) $3\frac{2}{7}$

d) $5\frac{4}{9}$

e) $\frac{118}{42}$

f) $\frac{81}{9}$

g) $9\frac{3}{4}$

h) $6\frac{8}{3}$

i) $\frac{54}{12}$

j) $10\frac{1}{10}$

1.1.4 Suma y resta de fracciones con igual denominador

Para efectuar estas operaciones, se realiza la suma algebraica de los numeradores y se dividen entre el denominador común. Es recomendable, de ser posible, simplificar la fracción resultante.

Ejemplo 1.5. Obtener la fracción resultante de sumar las siguientes fracciones $\frac{7}{9}+\frac{10}{9}-\frac{4}{9}$:

$$\frac{7}{9}+\frac{10}{9}-\frac{4}{9}=\frac{7+10-4}{9}=\frac{13}{9}$$

1.1.5 Suma y resta de fracciones con distinto denominador

En este caso, se recomienda simplificar las fracciones en la medida de lo posible. Después de ser irreducibles, se calcula el común denominador que será el denominador de la fracción resultante. Empleando el común denominador, se determinan los numeradores que se sumarán. Para ello, se divide el denominador común entre los denominadores de cada una de las fracciones que participan en la suma y el cociente de esta división, se multiplica por el numerador de la fracción correspondiente. Posteriormente, se procede a efectuar la suma algebraica correspondiente.

Ejemplo 1.6. Obtener la fracción resultante de sumar las siguientes fracciones $\frac{12}{48}+\frac{21}{49}-\frac{23}{60}$

Primero simplificamos las fracciones, con lo que obtenemos $\frac{1}{4}+\frac{3}{7}-\frac{23}{60}$. Posteriormente, obtenemos el mínimo común denominador. El mínimo común denominador (MCD) es el número divisible entre cada uno de los denominadores, y que además, es el de valor más pequeño. En este caso, el MCD es 420, por lo tanto,

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{7}-\frac{23}{60}=\frac{\left(420/4\right)(1)+\left(420/7\right)(3)-\left(420/60\right)(23)}{420}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{7}-\frac{23}{60}=\frac{105+180-161}{420}=\frac{124}{420}=\frac{31}{105}$$

1.1.6 Multiplicación de fracciones

Para multiplicar dos o más fracciones se multiplican los numeradores y este producto se divide entre el producto de los denominadores.

Ejemplo 1.7. Efectuar la siguiente multiplicación de fracciones $\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{17}{8}\right)$

$$\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{17}{8}\right)=\frac{(5)(3)(17)}{(7)(4)(8)}=\frac{255}{224}$$

Como observación, es recomendable que si tienes fracciones mixtas, primero hagas la conversión correspondiente a fracción impropia.

1.1.7 División de fracciones

Para dividir dos fracciones, se emplea la estrategia de multiplicación cruzada. Es decir, el numerador del dividendo se multiplica por el denominador del divisor, el producto resultante será el numerador de la fracción resultante; mientras que el denominador será el producto de la multiplicación del denominador del dividendo por el numerador del divisor. La fracción resultante se debe simplificar.

Ejemplo 1.8. Dividir las fracciones $\frac{14}{55} \div \frac{8}{35}$

En este ejemplo, el dividendo es $\frac{14}{55}$ y el divisor es $\frac{8}{35}$, por lo tanto:

$$\frac{14}{55} \div \frac{8}{35} = \frac{(14)(35)}{(55)(8)} = \frac{49}{44}$$

Ejercicios de práctica 3. Resuelva las siguientes operaciones con fracciones.

a) $\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{8}{7}\right) =$

b) $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} + \frac{2}{8} =$

c) $\frac{2}{12} \div \frac{7}{14} =$

d) $5\frac{3}{5} - 2\frac{3}{9} + \frac{2}{5} =$

e) $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{2}\right)\left(3\frac{3}{4}\right) =$

f) $\frac{5}{3} - \frac{7}{4} + \frac{6}{18} =$

g) $\left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{5}{9}\right) =$

h) $\left(\frac{11}{8}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{5}{2}\right) =$

i) $\frac{1}{3} \div \frac{5}{4} \div \frac{7}{2} =$

j) $\frac{1}{8} + \frac{9}{16} + \frac{1}{4} =$

1.2 Propiedades del sistema de los números reales

Se le llama sistema de números reales al conjunto de números reales y a las operaciones de adición (+), sustracción (-), división (/) y multiplicación (x) que se efectúan entre dichos números. Existen leyes y propiedades fundamentales para este sistema que nos permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para encontrar soluciones a problemas matemáticos.

En esta sección se abordarán las propiedades básicas del sistema de los números reales para las operaciones matemáticas.

1.2.1 Propiedades para la adición y la multiplicación

Las propiedades para la adición y la sustracción se resumen en la Tabla 1.1, donde *a*, *b* y *c* representan números reales.

Tabla 1.1. *Propiedades para la adición y la multiplicación*

Propiedades	**Adición**	**Multiplicación**
Ley clausurativa	$a+b$ es un número real	$(a)(b)$ es un número real
Ley asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(b\cdot c)=(a\cdot b)c$
Ley conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Propiedad de identidad	El número real 0 es llamado la identidad aditiva, ya que para todo número real *a*: $a+0=a=0+a$	El número real 1 es llamado identidad multiplicativa, ya que para todo número real *a*: $a\cdot 1=a=1\cdot a$
Propiedad del inverso aditivo y del recíproco	Para todo número real *a* existe un único número real llamado negativo o inverso aditivo de *a* representado por –*a* de tal manera que: $a+(-a)=0=(-a)+a$	Para todo número real *a* diferente de cero existe un único número real llamado recíproco o inverso multiplicativo de *a* representado por $\frac{1}{a}$ de tal manera que: $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1=\left(\frac{1}{a}\right)\cdot a$
Propiedad distributiva	a) $a(b+c)=ab+ac$ b) $(a+b)c=ac+bc$	
Ley cancelativa o anulativa	a) Si $a+c=b+c$ entonces $a=b$. b) Si $ac=bc$ y $c\neq 0$ entonces $a=b$.	
Ley de la multiplicación por cero	a) Si $a\cdot 0=0=0\cdot a$ b) Si $a\cdot b=0$ entonces $a=0$ ó $b=0$; o ambas.	

1.2.2 Propiedades para la sustracción

La tabla 1.2 muestra las propiedades más importantes de la sustracción, las cuales se relacionan con los números negativos.

1.2.3 Propiedades para las fracciones

1 ALGEBRA

2.1 Nomenclatura.

Termino

$$2a + 3b = c^3$$

Potencia

Coeficientes Base

Términos

$$(2a + 4)(5b + 10)$$

Factores

Numerador

$$\frac{a+1}{a^2+2}$$

Fracción

Denominador

I. En los siguientes ejercicios, indicar :

1. El numero de factores
2. Los coeficientes
3. La potencia mayor de a y b

1. $3a^3 + 5b - \left(4a^2 + 1\right) = 0$

2. $\frac{1}{2}a^4 + 3b - \left(5a + 4\right)\left(3a + b^2\right)$

3. $(2a^2 + 1)(5b^3 + b) - (2a^5)(3b^2)$

II. En los siguientes ejercicios, indicar:

1.El numero de factores
2.El numero de términos
3.Denominadores y numeradores

1. $3a(5b + 1)(8a^2 + b) + \dfrac{3a + b}{a^2} + 5$

2. $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2) + \dfrac{5a + b^2}{a^2 + b^2} + 2a^2$

3. $(3a)(5b)(a^2)(b^2)(c + 1) + \dfrac{a + b}{a - b} + 4c + 9a$

2.2 Suma Algebraica.

Procedimiento.

- Se suman únicamente los **términos semejantes** entre si (x con x, y con y, x^2 con x^2, a^2b con a^2b, etc.), considerando los signos de cada termino y sus coeficientes.
- - x es igual a (-1)x
- Si no aparece otro semejante a algún termino, se le suma 0 y queda inalterado en el resultado de la suma.

$$(2x + 3y - 4z) + (-x + 2z) = x + 3y - 2z$$

I) Resuelve las siguientes sumas algebraicas.

1. $\boxed{(8a+3b)+(2a+5b)=10a+8b}$
2. $(4a+7b-5c)+(6a+3b+8c)=$
3. $(2a-7b+4c)+(5a+3b-5c)=$
4. $(18a+13b)+(-20a-5b)=$
5. $(6a+3b-2c)+(-4a+5b+6c)=$
6. $(9a-11b+5c+8d)+(a+8b-7c-2d)=$
7. $(14a+5b)+(-7a+2b+5c)=$
8. $(2a+3b-5c)+(4a+2b+3c)+(a+b+5c)=$
9. $(3a+5b-2c)+(-a+2b+5c)+(6a-3b+2c)=$
10. $(4a+5b+2c)+(3a-7b+2c+4d)+(-6a+5b+c+2d)=$
11. $(-8a+3b+5c)+(5a+4b+3c)+(2a-7b+2c)+(3a+2b-4c)=$
12. $(6a+3b-5c+2d)+(-9a+2b+8c+6d)+(4a-8b-2c-3d)+(-2a-2b+3c-d)$
13. $(4a+5b+2d)+(2a+3c+d)+(5b+4c+3d)+(5a+3b+2c)=$
14. $(6a^2+3a-5)+(7a^2-6a+2)=$
15. $(8a^2+7a-3)+(-9a^2+5a+2)+(3a^2-9a+2)=$
16. $(2a^2+3a+2)+(3a^2+5a-3)+(-a^2+2a-4)+(-4a^2+a+2)=$

2.3 Resta Algebraica.

Procedimiento.

Se cambian los signos de la expresión algebraica que se va a restar.
$(2a + 3b + 5c) - (4a + 2b - 3c) = 2a + 3b + 5c - 4a - 2b + 3c = -2a + b + 8c$

I) Resuelve las siguientes operaciones.

1. $(6a + 3b + 5d) - (4a + 2b - 5c + 2d) =$

2. $(4x + 3y - 5z) - (2x - 2y - 3z) =$

3. $(3m + 2n - 5p + 4) - (m + 3n - 2p + 5) =$

4. $(5a + 7b - 4c - 2d) - (-3a + 2b - 6c + d) =$

5. $(2a + 3b + 4c) - (4a - 2b - 5c) =$

6. $(3a - 5b + 2c) - (2a - 3b + 5c) =$

7. $(3a + 4b - 5c) - (7a + 5b - 2c) =$

8. $(6a + 11b + 9c) - (2a + 7b + 5c) =$

9. $(9a + 7b - 5c - 3d) - (8a + 5b + 3c + 2d) =$

10. $(11a - 2b + 3c + 2d) - (7a - 3b - 2c + 5d) =$

11. $(4a + 5b + 8c) - (-2a + 3b + 5c) =$

12. $(4a - 5b + 2c) - (-3a + 2b - 3c) =$

2.4 Leyes de los Exponentes.

1. Cuando se multiplican dos potencias de las misma base, los exponentes se sumas.	$x^m \bullet x^n = x^{m+n}$
2. Cuando se dividen dos potencias de la misma base, los exponentes se restan.	$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
3. Cuando una potencia se eleva a otra potencia, los exponentes se multiplican.	$\left(x^m\right)^n = x^{mn}$
4. El producto de dos a más factores elevados a una misma potencia es igual al producto de los factores elevados, cada uno, al exponente del producto.	$\left(xy\right)^n = x^n y^n$
5. El cociente elevado a una potencia es igual a dividir el numerador elevado a la potencia entre el denominador elevado a la misma potencia.	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

I) Realiza las operaciones indicadas aplicando las leyes de los exponentes.

1. $\boxed{(x^2)(x^3) = x^5}$
2. $(a^3)(a^4)(a^2) =$
3. $(2a^3)(2a^5) =$
4. $(3b^3)(2b^6) =$
5. $(2x^2)(3x^3) =$
6. $\boxed{(a^2)^3 = a^6}$
7. $(b^4)^2 =$
8. $(c^5)^3 =$
9. $(2a^3)^4 =$
10. $(3a)^2 =$
11. $\boxed{\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 = \left(\frac{a^4}{b^6}\right)}$
12. $\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^3 =$
13. $\left(\frac{c^3}{d^5}\right)^4 =$
14. $\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^2 =$
15. $\left(\frac{a^2b^3}{c^2}\right)^5 =$

16. $\frac{c^8}{c^5} = c^3$

17. $\frac{a^5}{a^2} =$

18. $\frac{4b^2}{2b} =$

19. $\frac{12a^7}{4a^4} =$

20. $\frac{10x^5}{2x^3} =$

21. $(a^2b^3)^2 = a^4b^6$

22. $(4a^2b^3)^3 =$

23. $(2a^{2}b^{2}c^{2\ 1})^{2} =$

24. $(x^3y^5z)^5 =$

25. $(3a^4b^3)^4 =$

26. $\left(\frac{2x^2y}{z^3}\right)^4 =$

27. $\left(9x^2y^{\frac{1}{2}}z^3\right)^2 =$

28. $\frac{x^5y^6z^4}{x^2y^3z^4} =$

29. $\left(\frac{5x^4y^2w^3}{9x^2yw}\right)^2 =$

2.5 Multiplicación Algebraica.

Monomio por monomio y monomio por polinomio.

1. Se multiplica el monomio por cada término en el polinomio, siguiendo la *regla de los signos para la multiplicación* y las leyes de los exponentes.
$$(4a)(5a^2+2b)=20a^3+8ab$$
2. Los exponentes con igual base se suman y los coeficientes se multiplican.
$$(4a)(5a^2)=(4)(5)a^{1+2}=20a^3$$
3. **Regla de los signos para la multiplicación:**
$$(+)(+)=(+)$$
$$(+)(-)=(-)$$
$$(-)(+)=(-)$$
$$(-)(-)=(+)$$

Ej. $(-4a)(-4a)=+16a^2=16a^2$

$(-4a)(+4a)=-16a^2$

I. Resuelva las siguientes multiplicaciones de monomios por monomios

1. $\boxed{(2a)(3a)=6a^2}$
2. $(5x)(3x)=$
3. $(2x^2)(5x^3)=$
4. $(6a^2b)(3ab^2)=$
5. $(7a^2)(3a^3)(-2a)=$
6. $(-4a^3x)(-3a^2x^2)=$
7. $(-6ab^2c)(2ab)=$
8. $\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{5}{6}a^2\right)=$
9. $(2a^2b)\left(\frac{3}{4}ab^2\right)=$
10. $(2a^2b)\left(\frac{3}{4}ab^2\right)=$
11. $\left(\frac{3}{5}a^3\right)\left(\frac{4}{9}a^2b\right)=$
12. $(6a^2b^{-3})(-2ab^3)=$

II. Resuelve las siguientes multiplicaciones de monomio por polinomio

1. $\boxed{a(2a^2 + 3a + 1) = 2a^3 + 3a^2 + a}$

2. $a^2(5a + 2b + 3c) =$

3. $ab(2ab + 1) =$

4. $3ab(4a^2 + 2a - 5) =$

5. $5(2a + 3) =$

6. $3xyz\left(\frac{2}{x} + 4xy - 3z\right) =$

7. $\frac{4x}{5}(3x^3 + 2x^2 - 5x + 10) =$

8. $2a^3b^2(6a^3b - 3a^2b + 2ab^2) =$

9. $-8a(4a + 3b - 2c) =$

10. $7ab(2 - 4a + 3a^2) =$

11. $\frac{2x^2}{3z^3}y\left(\frac{3x^{\frac{1}{2}}y^3}{2w} - \frac{3x^{-\frac{1}{2}}y^{-1}}{27w^{-2}}\right) =$

12. $\left(\frac{5x^{\frac{1}{2}}y^2}{2z^3}\right)\left(\frac{2x^{-\frac{1}{3}}y^{-2}}{5z^{-3}} - \frac{2x^{\frac{1}{3}}y^2}{9z^3} + xyz\right) =$

2.6 Multiplicación de polinomio por polinomio.

Procedimiento.

1. Se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio, siguiendo la *regla de los signos de multiplicación* y las leyes de los exponentes.
2. Se suman los términos semejantes

Horizontalmente:

$$(2a + 3b)(4a + 5b) = (2a)(4a) + (2a)(5b) + (3b)(4a) + (3b)(5b)$$

$$= 8a^2 + 10ab + 12ab + 15b^2$$

$$= 8a^2 + 22ab + 15b^2$$

NOTA: Es posible multiplicar de derecha a izquierda, como en aritmética, o de izquierda a derecha para mantener el orden de los términos

I. Encuentra los productos indicados.

1. $(5a + 3b)(2a + 7b) =$
2. $(6a + 5b)(3a - 2b) =$
3. $(3a + 2b + 5c)(4a + 3b - 2c) =$
4. $(a - 3)(2a^3 + 3a^2 - 7a + 5) =$
5. $(6a^2 + 3a + 2)(7a^2 - 5a + 8) =$
6. $(4a + 7b)(2a + 3b) =$
7. $(8a + 5b)(3a - 4b) =$
8. $(7a^2 + 2ab + 5b^2)(5a - 2b) =$
9. $(8a^2 + 7ab - 9b^2)(3a - 5b) =$
10. $(4a^2 + 3a + 2)(6a + 5) =$

11. $(3a^2 - 5ab + 2b^2)(4a^2 + 3ab - 7b^2) =$

12. $(11a^2 + 3ab + 10b^2)(7a^2 - 8ab + b^2) =$

13. $(9a^3 + 3a^2b - 7ab^2 + 5b^3)(3a + 2b) =$

14. $(4a^3 - 6a^2b + 7ab^2 - 8b^3)(2a^2 - 3ab + 6b^2) =$

15. $(a^{1/2} + 3a^2b + 1)(2a^2 - b) =$

16. $\left(-\frac{1}{2}x^2y - 3yz + 2x\right)(-2y^2x - 9yz + 3x) =$

17. $\left(\frac{3x^2z}{y} - \frac{2z}{y}\right)\left(\frac{5x^2z}{y^2} - 10xz + 3y^2\right) =$

2.7 División Algebraica.

Procedimiento.
Para realizar las divisiones algebraicas, es necesario tomar en cuenta que:

1. Los coeficientes se dividen.

2. los exponentes se restan; el exponente resultante se anota en donde este el exponente mayor.

3. Regla de los signos:

$$(+)\,/(+) = (+)$$
$$(+)\,/(-) = (-)$$
$$(-)\,/(+) = (-)$$
$$(-)\,/(-) = (+)$$

I) Efectúa las divisiones indicadas.

1. $\boxed{\dfrac{6a^2}{3a} = \dfrac{6}{3}a^{2-1} = 2a}$

2. $\dfrac{10a^2b}{5ab} =$

3. $\dfrac{-16a^3b}{4a^2b^2} =$

4. $\dfrac{-5a^2b}{-10ab} =$

5. $\dfrac{4a^4b^3}{-12a^2b} =$

6. $\dfrac{5ab^2}{7a^3b} =$

7. $\dfrac{8x^4y^4z - 32x^3y^3z^2}{16x^5y^2z} =$

8. $\dfrac{x^3y^2z + xy}{x^3y^2z} =$

2.8 División de polinomio entre polinomio.

Procedimiento.

1. Se ordena el dividendo y el divisor, según las potencias descendentes de una misma literal.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, y el resultado es el primer término del cociente. Se multiplica todo el divisor por este término y se resta el producto obtenido del dividendo.
3. El residuo obtenido en el paso 2 se toma como nuevo dividendo y se repite el proceso del paso 2 para obtener el segundo término del cociente.
4. Se repite este proceso hasta que se obtenga un residuo nulo o de grado inferior que el del divisor.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2xy + 3y^2 \\
\cline{2-2}
x^2 + xy - 2y^2 & x^4 - x^3y - x^2y^2 + 7xy^3 - 6y^4 \\
 & -x^4 - x^3y + 2x^2y^2 \\
 & 0 - 2x^3y + x^2y^2 + 7xy^3 \\
 & 0 + 2x^3y + 2x^2y^2 - 4xy^3 \\
 & 0 + 0 + 3x^2y^2 + 3xy^3 - 6y^4 \\
 & 0 + 0 - 3x^2y^2 - 3xy^3 + 6y^4 \\
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & Q \\
\cline{2-2}
B & A \\
R &
\end{array}
$$

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

$$A = BQ + R$$

Nomenclatura

A=Dividiendo
B=Divisor
Q=Cociente
R=Residuo

I) Efectuar la división indicada.

1. $(a^3 - 3a^2 + 4a - 7) \div (a^2 + a - 1)$

2. $(x^3 - 3x^2 + x - 5) \div (x - 2)$

3. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 4) \div (x^2 - x + 2)$

2.9 Despeje y sustitución algebraica.

Procedimiento.

Para determinar números o variables que están **sumando.**

$x + 5 = 10$

$x + 5 - 5 = 10 - 5$

$x = 5$

Para eliminar números o variables que están **restando.**

$x - 5 = 10$

$x - 5 + 5 = 10 + 5$

$x = 15$

Para eliminar números o variables que están **multiplicando**

$5x = 10$

$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$

$x = 2$

Para eliminar números o variables que están **dividiendo**

$\frac{x}{5} = 10$

$5\left(\frac{x}{5}\right) = 5(10)$

$x = 50$

Para eliminar **exponentes**

$x^2 = 9$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

$x = 3$

Para eliminar **radicales**

$\sqrt{x} = 3$

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 3^2$

$x = 9$

I) Despeja las literales que se indican en cada una de las siguientes formulas.

1. $P = 4a$,despejar a

2. $A = bh$,despejar b yh

3. $A = \frac{bh}{2}$, despejar b y h

4. $V = \frac{s}{t}$, despejar t y s

5. $A = \pi \_ r^2$, despejar r

6. $V_f = V_0 + at$, despejar V_0, a y t

7. $V_f^2 = V_0^2 + 2as$, despejar V_f, V_0, a y s

8. $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$, despejar, r y q_1

9. $-m_1 a - m_2 a = w_2 - w_1 sen\theta$, despejar a y $sen\theta$

10. $y = V_\circ + \frac{1}{2} at^2$, despejar a y $V_\circ$

11. $T_3 - m_1 a - m_2 a - m_3 a$, despejar a

12. $T_1 + 2sen\theta = ma - T_2$, despejar T_1, T_2 y a

2.10 Productos Notables.

Procedimiento.
Cuadrado de un binomio (o "binomio al cuadrado)

Es la expresión algebraica de dos términos separados por un signo de **suma o resta**, dentro de un paréntesis elevado al exponente dos:

$$(a+b)^2$$

- El binomio al cuadrado también puede expresarse como: $(a+b)(a+b)=(a+b)^2$
- El binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer termino, mas el doble producto del primer termino por el segundo termino, mas el cuadrado del segundo termino (o sea, un **"Trinomio cuadrado perfecto"**)

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \blacktriangleleft \text{ T.C.P}$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(2a+3b)^2 = 4a^2+12ab+9b^2$$

I) Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado.

1. $(5a-3b)^2=$
2. $(2a+5b)^2=$
3. $(7a-3)^2=$
4. $(9a-7b)^2=$
5. $(4a+5b)^2=$
6. $(5a+7)^2=$
7. $(11a-5b)^2=$
8. $(13a+8x)^2=$
9. $(5x-9y)^2=$
10. $(-3x+2y)^2=$
11. $(6a+5b)^2=$
12. $(8a+b)^2=$
13. $(12a+9b)^2=$
14. $(7x-11y)^2=$
15. $(3ab+2c)^2=$
16. $(5a+6)^2=$
17. $(a-8)^2=$

18. $(a^2 + 4b)^2 =$

19. $(7a^2 + 2b^2)^2 =$

20. $\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{4b}{3}\right)^2 =$

21. $(3xy + \frac{1}{2}x^2y^2)^2 =$

22. $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}y^3\right)^2 =$

23. $\left(\frac{2}{3}x^{12} + xy^4\right)^2 =$

2.10.1 Producto de binomios conjugados.

Producto de binomios conjugados.

Los "binomios conjugados" son dos binomios que se multiplican entre si, cuyos **términos son iguales** pero con **diferente signo** en la unión de términos de cada binomio:

$$(a+b)(a-b)$$

- El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del primer termino de cada paréntesis menos el cuadrado del segundo termino de cada paréntesis (o sea, una **"Diferencia de cuadrados"**)

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

I) Obtener los siguientes productos:

1. $(2a+3b)(2a-3b)=$
2. $(4a-5b)(4a+5b)=$
3. $(2a+5b)(2a-5b)=$
4. $(11a-5b)(11a+5b)=$
5. $(5x+9y)(5x-9y)=$
6. $(6a-5b)(6a+5b)=$
7. $(12a+9b)(12a-9b)=$
8. $(3ab-2c)(3ab+2c)=$
9. $(a-8)(a+8)=$
10. $(7a^2+2b^2)(7a^2-2b^2)=$

2.11 Factorización.

2.11.1 Factor común.

Factor común.

Es el proceso de identificar el factor con su mínima potencia en los diferentes términos y escribirlo como factor de dichos términos. Es el proceso para buscar los factores que originaron el producto.

Factorizar

1. $a^3 + a^2b + a = a(a^2 + ab + 1)$
2. $(x+1)(x+y) + (x+1)^2(x+y)^3 = (x+1)(x+y)\left[1 + (x+1)(x+y)^2\right]$

I. **Factorizar las siguientes expresiones**

1. $a^3b^2 + 3ab + 2ab^2 =$

2. $6a^2b^2 + 3ab + 9a^3b^3 =$

3. $2(x+1)^4 y^3 + 8y(x+1)^2 + 24y^2(x+1) =$

4. $z^4(x+y)^2(y+1)^3 + z^2(x+y)(y+1) =$

2.11.2 Trinomio cuadrado perfecto (T. C. P.).

Trinomio cuadrado perfecto
(T.C.P.)

Es la expresión algebraica de tres términos cuyos extremos tienen raíz cuadrada exacta. Se factoriza en un "binomio al cuadrado".

$$a^2 + 2ab + b^2$$

Comprobación para saber si un trinomio es un T.C.P.: El doble producto de la raíz del primer término por la raíz del tercer término debe ser igual al segundo término.

- Para factorizar un T.C.P., se saca la raíz cuadrada al primer y tercer términos y se pone entre ellos el signo del segundo termino; luego se eleva todo al cuadrado:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

I) Factorizar los siguientes trinomios.

1. $16a^2 + 40ab + 25b^2 =$

2. $a^2 + 6a + 9 =$

3. $9x^2 - 54xy + 81y^2 =$

4. $100x^2 + 260xy + 169y^2 =$

5. $25a^2 + 70ab + 49b^2 =$

2.11.3 Diferencia de cuadrados.

Diferencia de cuadrados.

Es la resta algebraica de dos términos que tienen raíz cuadrada exacta:

$$a^2 - b^2$$

Para factorizar una diferencia de cuadrados, se saca raíz cuadrada al primer termino menos la raíz cuadrada del segundo termino, todo dentro de un paréntesis multiplicado por otro con las mismos términos, pero positivos los dos:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

I) Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

1. $4a^2 - 25b^2 =$

2. $a^2 - b^2 =$

3. $x^2 - 81y^2 =$

4. $100 - 121y^2 =$

5. $16a - 169b =$

2.11.4 Trinomio de segundo grado.

Trinomio de segundo grado.

Es una expresión algebraica de tres términos que no necesariamente es un trinomio cuadrado perfecto. En general, el trinomio de segundo grado tiene la forma:

$ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son los coeficientes

- El trinomio de segundo grado es el resultado de la multiplicación de binomios con términos semejantes.
- Para factorizar un trinomio de segundo grado en el caso especial donde a=1, se busca una pareja de números cuyo producto sea igual al tercer termino y cuya suma o diferencia sea igual al segundo termino. Se acomodan en dos paréntesis con las variables del primer y tercer término.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$
$$a^2 + 15ab + 50b^2 = (a + 5b)(a + 10b)$$

I) Factoriza los siguientes trinomios.

1. $a^2 + 7a + 10 =$

2. $a^2 + 8a + 15 =$

3. $x^2 - 10xy + 21y^2 =$

4. $x^2 - 21xy + 98y^2 =$

5. $a^2 + 9ab + 14b^2 =$

2.12 Mínimo común múltiplo (M.C.M).

Procedimiento.
Hallar el M.C.M de $x^2 - y^2$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^3 + y^3$.

Primero se escribe cada polinomio en forma factorizada:
$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$
$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Los factores diferentes son $x+y$, $x-y$, $x^2 - xy + y^2$. El mayor exponente de $x+y$ es 2 y el de los otros factores es 1. Por lo tanto,
M.C.M = $(x+y)^2(x-y)(x^2 - xy + y^2)$

I) Hallar el M.C.M de las siguientes expresiones.

1) $6x^2$, $3xy^2$, $12x^3y$

2) $2x^2 + 3x - 2$, $6x^2 - 7x + 2$

3) $x^2 - x - 2$, $x^2 + 4x + 3$, $x^2 + x - 6$

2.13 Suma de fracciones.

Procedimiento.
Considere la siguiente suma algebraica:

$$\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{x-3}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}$$

El menor denominador común es

$$(x-1)^2(x+1)$$

Que es el M.C.M de los denominadores

$$\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}+\frac{3}{x+1}=\frac{x(x+1)-(x-3)(x-1)+3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{3x^2-x}{(x-1)^2(x+1)}$$

I) Efectuar la suma algebraica indicada.

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$.

2) $\frac{m}{m+1}-\frac{m}{m-1}+\frac{2}{m^2-1}$.

3) $\frac{1-x}{2+x}-\frac{1+x}{2-x}-\frac{3x}{x^2-4}$.

2.14 División y multiplicación de fracciones.

Procedimiento.
Considere la siguiente división de fracciones:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-1}\div\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{x^2+x-6}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{(x^2+x-6)(x+1)}{(x^2-1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x+3)(x-2)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}=\frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$$

I) Efectuar la operación indicada y simplificar el resultado.

1) $\frac{5x^2y}{3ab^2}\cdot\frac{9ab^2}{10xy^2}$.

2) $\frac{(a-2b)^2}{x^3}\cdot\frac{x^2}{a^2-4b^2}$.

3) $\frac{4x^2-9y^2}{x^2-y^2}\div\frac{2x+3y}{x-y}$.

4) $\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\div\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

2.15 Radicales.

Radicales.

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$$

$$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos:
Simplificar

1. $\sqrt[3]{8a^5} = \sqrt[3]{2^3 a^3 a^2} = \sqrt[3]{2^3 a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

2. $\sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3^2\cdot 3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

3. $4\sqrt{2} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{32} - \sqrt{50} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{9\cdot 2} + 3\sqrt{16\cdot 2} - \sqrt{25\cdot 2}$
   $= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

4. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$

5. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

I) Simplificar.

1. $\sqrt{8a^3} =$

2. $\sqrt[3]{-27b^5} =$

3. $\sqrt{\frac{75a^3}{2}} =$

4. $\sqrt{45a^5x^3} =$

5. $4\sqrt{49}-3\sqrt{64}=$

6. $2\sqrt[3]{8}+2\sqrt[3]{27}=$

7. $\sqrt{27}\sqrt{3}=$

8. $\sqrt{ab}\sqrt{\frac{a}{b}}=$

9. $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}=$

10. $\frac{\sqrt{18}\ \sqrt{2}}{\sqrt{8}}=$

11. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{8}}=$

12. $\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab}}=$

13. $\frac{8}{\sqrt[3]{16}}=$

2.16 Formula General

Solución de ecuaciones de segundo grado utilizando la formula general.

PROCEDIMIENTO:

1. Se escribe la ecuación cuadrática de la forma general:

   $ax^2 + bx + c = 0$, donde a,b y c son los coeficientes
2. Se identifican y se escriben los valores de los coeficientes a,b y c.
3. Se sustituyen los valores a,b y c en la formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. Se resuelve la variable para x_1 y x_2, usando los signos + y – del radical en la formula general, respectivamente.
5. Las dos soluciones a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son x_1 y x_2.

I) Encuentre las soluciones para las siguientes ecuaciones de segundo grado, utilizando la formula general.

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$
2. $3x + 2x^2 = 4$

2.17 Funciones

Definición de función.

Si dos variables *x* y *y* están relacionadas de tal modo que para cada valor de *x*, le corresponde uno o más valores de *y*, se dice que *y* es una función de *x*.
Notación de función.

$$y = f(x) = 2x + 5$$

En donde f(x) se lee "función f de x" o simplemente "f de x"

$f(a) = 2a + 5$

$f(0) = 2(0) + 5 = 5$

$f(-1) = 2(-1) + 5 = 3, \quad etc.$

Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad y \quad F(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad hallar \quad \dfrac{f(2) + F(1)}{1 - f(2) \cdot F(1)}$

2.18 La función lineal

Definición de función lineal.

La ecuación lineal con una incógnita

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

Tiene la solución única $x = -\dfrac{b}{a}$

Resolver la ecuación $ax + b^2 = a^2 + bx, \quad a \neq b.$

Solución.

$ax - bx = a^2 - b^2$

$(a - b)x = a^2 - b^2$

$x = a + b$

I) Resolver la ecuación dada.

1. $3x - 2 = 3 - 2x$

2. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3x}{5} = \dfrac{x-6}{2}$

3. $2(2x-a)-(a-2x)=3x$

4. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{a+b}{a}$

5. $\frac{2x}{x-1}-2=\frac{3}{x+1}$

2.19 Ecuación lineal o de primer grado con dos incógnitas.

Procedimiento.
Resolver el sistema $3x-2y=1, \quad 2x+3y=18$

Solución.

Multiplicamos la primera por 3 y la segunda por 2, y obtenemos respectivamente las ecuaciones equivalentes,

$$9x-6y=3$$
$$4x+6y=36$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene

13x = 39, de donde x = 3.

Sustituyendo x en la primera ecuación y resolver para *y* se obtiene,

9 – 2*y* = 1, de donde *y* = 4.

I) Resolver el sistema dado.

1. $3x-y=2, \quad 2x+3y=5$

2. $2x-3y=9, \quad 3x+4y=5$

3. $3x+2y=0, \quad 2x+5y=11$

2.20 Fracciones parciales.

2.20.1 Caso I. Factores lineales distintos.

Procedimiento.

Descomponer $\dfrac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$ en fracciones parciales simples.

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

La identidad es válida para todos los valores de *x* exceptuando 1, -1 y -2, pues para cada uno de estos valores el denominador se anula. Quitando denominadores la identidad es

$$5x + 1 \equiv A(x + 1)(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)(x + 1)$$

Sustituimos en la identidad anterior los valores de x que fueron excluidos. Así para x = 1 se tiene

$$5 + 1 = A(1 + 1)(1 + 2), \text{ de donde } A = 1.$$

Para x = -1

$$-5 + 1 = B(-1 - 1)(-1 + 2), \text{ de donde } B = 2.$$

Finalmente, para x = -2

$$-10 + 1 = C(-2 - 1)(-2 + 1), \text{ de donde } C = -3$$

Por lo tanto

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} \equiv \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{-3}{x+2}$$

2.20.2 Caso II. Factores lineales repetidos

Procedimiento.

Descomponer $\frac{5x^2+4x+2}{(x-4)(x+3)^2}$ en fracciones parciales simples.

$$\frac{5x^2+4x+2}{(x-4)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$5x^2+4x+2 \equiv A(x+3)^2 + B(x-4)(x+3) + C(x-4)$$

Sustituyendo x = 4 en la identidad anterior resulta

$$80 + 16 + 2 = A(4+3)^2 \text{, de donde A = 2}$$

Para x = -3 se tiene

$$45 - 12 + 2 = C(-3-4) \text{ , de donde C = -5}$$

Si sustituimos A = 2, C =-5 y algún valor sencillo de x, digamos x = 0, podemos obtener fácilmente B

$$\begin{aligned} &2 = 2(3)^2 + B(-4)(3) + (-5)(-4), \\ &2 = 18 - 12B + 20, \\ &12B = 36 \\ &B = 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{5x^2+4x+2}{(x-4)(x+3)^2} \equiv \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}$$

2.20.3 Caso III. Factores cuadráticos distintos

Procedimiento.

Descomponer $\dfrac{3x^2 - x^2 + 4x}{(x^2+1)(x^2 - x + 1)}$ en sus fracciones parciales simples

$$\frac{3x^2 - x^2 + 4x}{(x^2+1)(x^2 - x + 1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2 - x + 1}$$

$$3x^2 - x^2 + 4x \equiv (Ax+B)(x^2 - x + 1) + (Cx+D)(x^2+1)$$

Sustituimos x por cuatro valores sencillos diferentes, Así:

$$\begin{array}{l}
Para \quad x = 0, \quad 0 = B + D. \\
Para \quad x = 1, \quad 6 = (A+B)(1) + (C+D)(2), \\
o \quad sea \quad A + B + 2C + 2D = 6. \\
Para \quad x = -1, \quad -8 = (-A+B)(3) + (-C+D)(2), \\
o \quad sea \quad 3A - 3B + 2C - 2D = 8. \\
Para \quad x = 2, \quad 24 - 4 + 8 = (2A+B)(3) + (2C+D)(5), \\
o \quad sea \quad 6A + 3B + 10C + 5D = 28
\end{array}$$

Se deja como ejercicio resolver este sistema de ecuaciones y ver que la solución es
A = 1, B = -1, C = 2, D = 1. Por lo tanto la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{3x^2 - x^2 + 4x}{(x^2+1)(x^2 - x + 1)} \equiv \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2x+1}{x^2 - x + 1}$$

2.20.4 Caso IV. Factores cuadráticos repetidos

Procedimiento.

Descomponer $\dfrac{4x^4+13x^2-4x+14}{(x-1)(x^2+2)^2}$ en sus fracciones parciales

$$\frac{4x^4+13x^2-4x+14}{(x-1)(x^2+2)^2} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}.$$

Quitando denominadores resulta

$$4x^4+13x^2-4x+14 \equiv A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+2)+(Dx+E)(x-1).$$

Para x = 1 se tiene 27 = 9A, de donde A = 3.

Para las constantes restantes sustituimos a x por valores sencillos en la identidad. Así tenemos:

$$
\begin{aligned}
&para \quad x=0, \quad A=3, 14=3(4)+C(-1)(2)+E(-1),\\
&o \quad sea \quad 2C+E=-2.\\
&Para \quad x=-1. \quad A=3,\\
&35=3(3)^2+(-B+C)(-2)(3)+(\_\,D+E)(-2),\\
&o \quad sea \quad 6B-6C+2D\,\_\,2F=8.\\
&Para \quad x=2, \quad A=3,\\
&64+52-8+14=3(6)^2+(2B+C)(1)(6)+(2D+E)(1),\\
&o \quad sea \quad 12B+6C+2D+E=14.\\
&Para \quad x=-2, \quad A=3,\\
&64+52+8+14=3(6)^2+(-2B+C)(-3)(6)+(-2D+E)(-3),\\
&o \quad sea \quad 36B-18C+6D-3E=30.
\end{aligned}
$$

La solución de este sistema de ecuaciones es B = 1, C = 1, D = 0, E = -4. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x^4+13x^2-4x+14}{(x-1)(x^2+2)^2} \equiv \frac{3}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+2}+\frac{4}{(x^2+2)^2}$$

I) Descomponer en fracciones parciales.

1. $\dfrac{3x+6}{(x-2)(x+4)}$

2. $\dfrac{3x-1}{(x+1)^2}$

3. $\dfrac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}$

4. $\dfrac{x^3+2x^2+3x}{(x^2+x+1)^2}$

2.21 Conversión de unidades

Procedimiento.

Toda cantidad puede multiplicarse por uno sin que cambie su valor.

$$1\min = 60s$$

$$(1)(1\min) = (1)(60s)$$

$$1 = \frac{60s}{\min} \text{ ó } \frac{1\min}{60s} = 1$$

Es igual poner $\frac{60s}{1\min}$ que $\frac{1\min}{60s}$

Lo anterior es valido para cualquier magnitud física

$\frac{1km}{1000m}$ Es igual a $\frac{1000m}{1km}$

Algunas equivalencias

1 km = 1000m
1 milla (mi) = 1609m
1 m = 100cm
1 pulgada (in) = 2.54cm
1 pie (ft) = 12 in
1 m = 3.14 ft

Ejemplo. Convertir 55 mi/h a m/s

$$(55mi/h)(1609m/mi)(1h/60\min)(1\min/60s) = 25m/s$$

I. Resuelve las siguientes conversiones

1. $20mi/h$ a km/s
2. $34\ ft$ a cm
3. $80mi/h$ a km/h

4. $85\ ft/h$ a m/s

5. Transcribamos en seguida la velocidad máxima de varios animales, pero en distintas unidades. Convierta estos datos en m/s y luego clasifique los animales por orden de rapidez máxima creciente: ardilla 19 km/h; conejo, 30 nudos; caracol, 0.30 mi/h; araña, 1.8 ft/s; leopardo, 1.9 km/min; ser humano, 1000 cm/s; zorro, 1100 m/min, león, 1900 km/día.

6. Convertir 4 años luz a km.

7. Convertir 8 min luz a km

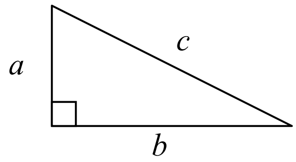
3 TRIGONOMETRÍA

3.1 Teorema de Pitágoras

Definición.

"En todo **triangulo rectángulo**, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".
$c^2 = a^2 + b^2$, donde c es la hipotenusa; a y b son los catetos.

Hipotenusa(c): Lado que se opone al ángulo recto. (Es el lado mas largo en un triangulo rectángulo).
Catetos (a y b): Lados que forman el ángulo recto. (Siempre son menores que la hipotenusa)



- Obtención de un lado de un triangulo rectángulo, a partir de los otros dos lados.

Del Teorema de Pitágoras se obtiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

I) Resuelve los siguientes triángulos rectángulos, encontrando el lado que falta.

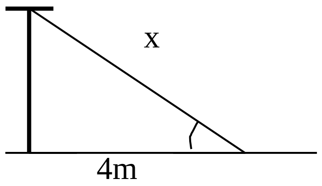
1. $a = 4$, $b = 5$
2. $a = 3.4$, $b = 5.25$
3. $a = 5$, $c = 12$
4. $a = 1$, $b = 1$
5. $a = 7$, $b = 4$
6. $a = 2$, $b = 2$
7. $a = 4$, $c = 5$
8. $b = 1$, $c = 2$
9. $a = 10$, $b = 8$
10. $b = 3$, $c = 4$

11. $b = 3.5$
$c = 6$

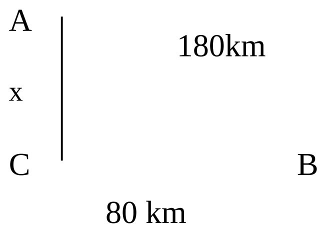
12. $a = 1$
$b = 2$

II). Resuelve los siguientes problemas.

1. Se instala un poste para cables de energía que mide 8 metros de altura. ¿Que longitud tiene el cable de acero que se instalo para reforzarlo si el gancho para sujetarlo esta a 4 metros del poste?



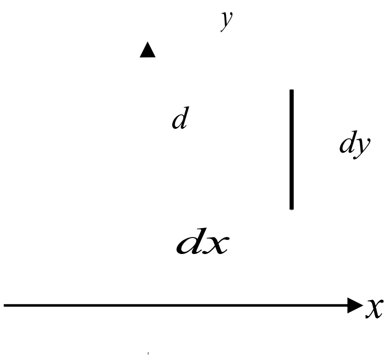
2. Tres ciudades están unidas por carreteras como se muestra en el diagrama. Si se desea construir una carretera que se comunique directamente a la cuidad A con la cuidad C, ¿Qué longitud tendrá?



3.1.1 Distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

Distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

Para calcular la distancia entre los puntos cuyas coordenadas $P_1(X_1, Y_1)$ y $P_2(X_2, Y_2)$, se usa el **teorema de Pitágoras**:



$$d^2 = d_x^2 + d_y^2 \Longrightarrow d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$$

Donde:
d_x Es la distancia recorrida en la dirección horizontal.
d_y Es la distancia recorrida en la dirección vertical.

$d_x = (x_2 - x_1)$
$d_y = (y_2 - y_1)$

I) Encuentra la distancia entre las parejas de puntos que se indican a continuación y grafica los puntos.

1. $P_1(2,3)$
   $P_2(5,5)$

2. $P_1(2,-3)$
   $P_2(-4,-1)$

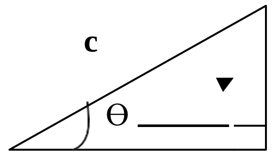
3. $P_1(1,2)$
   $P_2(-4,3)$

4. $P_1(1,-2)$
   $P_2(5,7)$

3.1.2 Funciones trigonométricas.

Definiciones básicas.

Hipotenusa



b cateto **opuesto** al ángulo Θ

a

Cateto **adyacente**
(Junto) al ángulo

Funciones Trigonometricas:

Seno del ángulo Θ $\qquad \text{sen}\ \Theta = \dfrac{\textit{opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$

Coseno del ángulo Θ $\qquad \cos\Theta = \dfrac{\textit{adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$

Tangente del ángulo Θ $\qquad \tan\Theta = \dfrac{\textit{sen}\Theta}{\cos\Theta} = \dfrac{\textit{opuesto}}{\textit{adyacente}} = \dfrac{b}{a}$

Cosecante del ángulo Θ $\qquad \csc\Theta = \dfrac{1}{\textit{sen}\Theta} = \dfrac{\textit{hipotenusa}}{\textit{opuesto}} = \dfrac{c}{b}$

Secante del ángulo Θ $\qquad \sec\Theta = \dfrac{1}{\cos\Theta} = \dfrac{\textit{hipotenusa}}{\textit{adyacente}} = \dfrac{c}{a}$

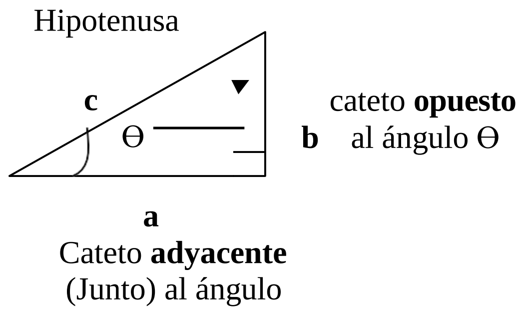
Cotangente del ángulo Θ $\qquad \cot\Theta = \dfrac{1}{\tan\Theta} = \dfrac{\cos\Theta}{\textit{sen}\Theta} = \dfrac{\textit{adyavente}}{\textit{opuesto}} = \dfrac{a}{b}$

NOTAS:

- Los valores de las funciones trigonometricas **son números** sin unidades.
- Seno y coseno de Θ son las dos funciones trigonometricas básicas.
- Tangente de Θ es muy usual. (Se sugiere memorizar estas tres).

3.2 Trigonometría

Obtención del valor del ángulo Θ.



Despejando θ de cada función trigonometría, se tiene:

$\Theta = \mathrm{sen}^{-1}(b/c) = \mathrm{arc\ sen}\,(b/c)$ $\leftarrow$ arco seno

$\Theta = \cos^{-1}(a/c) = \mathrm{arc\ cos}\,(a/c)$ $\leftarrow$ arco coseno

$\Theta = \tan^{-1}(b/a) = \mathrm{arc\ tan}\,(b/a)$ $\leftarrow$ **arco tangente**

$\Theta = \csc^{-1}(c/b) = \mathrm{arc\ csc}\,(c/b)$ $\leftarrow$ arco cosecante

$\Theta = \sec^{-1}(c/a) = \mathrm{arc\ sec}\,(c/a)$ $\leftarrow$ arco secante

$\Theta = \cot^{-1}(b/c) = \mathrm{arc\ cot}\,(b/c)$ $\leftarrow$ arco cotangente

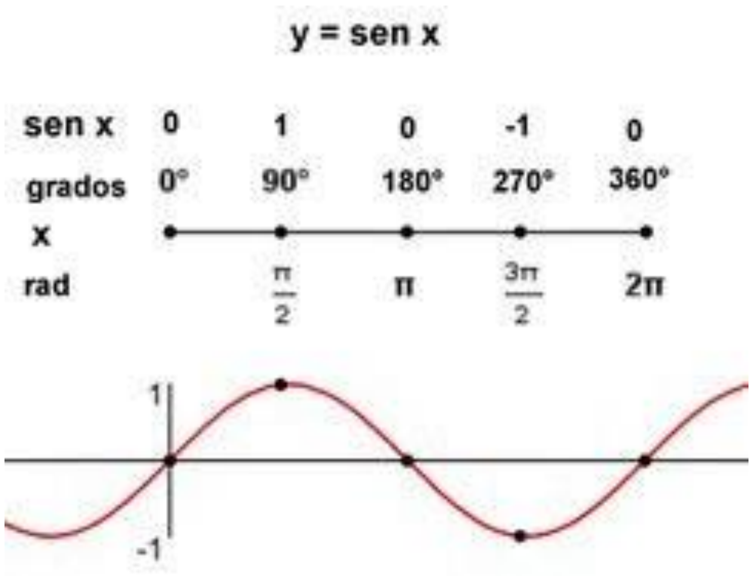
NOTAS:

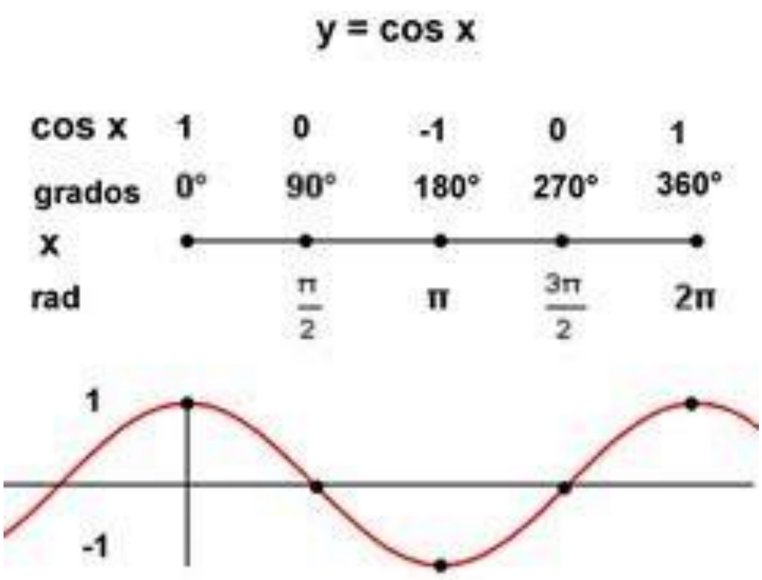
- Es muy común utilizar el arco tangente para obtener al ángulo Θ. Pero como se ve, cualquier función trigonometría sirve para despejar Θ. ¿Cuál usar? Dependerá de los lados del triangulo rectángulo que se conozcan en el problema que se quiera resolver.
- Los valores de Θ que se obtienen pueden estar en grados o en radianes (<u>según la función Deg o Rad. que se utilice en la calculadora para obtener Θ</u>).
- El valor del otro ángulo (α) puede obtenerse así:

$$\alpha = 90° - \Theta \quad \text{(con } \Theta \text{ y } \alpha \text{ en grados)}$$

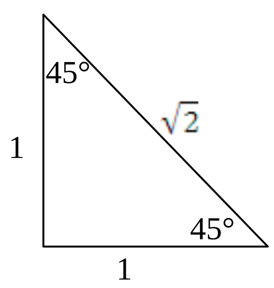
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \Theta \quad \text{(con } \Theta \text{ y } \alpha \text{ en radianes)}$$

Calculo del seno y coseno de 0°, 90°, 180°, 270° y 360° a partir de sus gráficas:

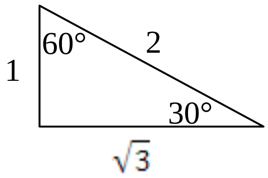




Calculo del seno y coseno de 30°, 45° y 60° sin usar calculadora (valor exacto)



Sen 45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Cos 45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

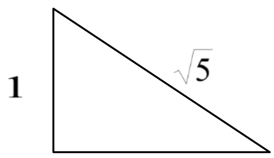


Sen 30°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Sen 60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos 30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos 60°	$\frac{1}{2}$

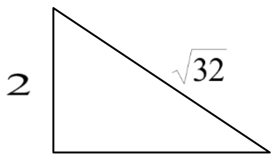
Nota: Recordar que 30° = $\frac{!}{!}$, 60° = $\frac{!}{!}$ y 45° = $\frac{!}{!}$

I. Calcular el lado que falta, las seis funciones trigonometricas y los ángulos interiores de los siguientes triángulos.

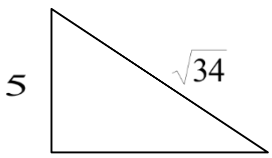
1.



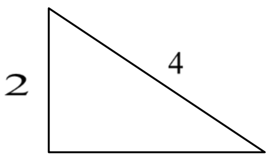
2.



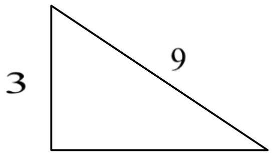
3.



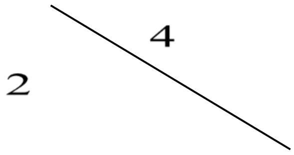
4.



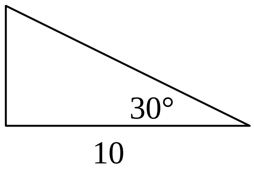
5.



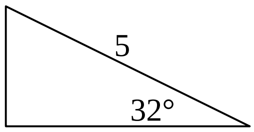
6.



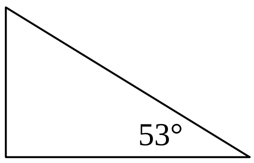
7.



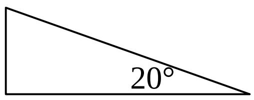
8.



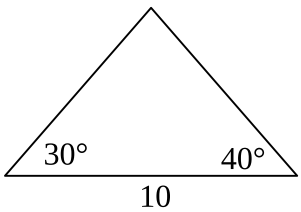
9.



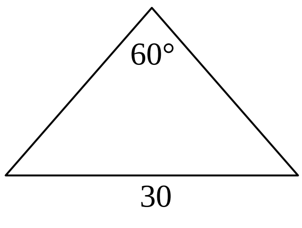
10.



11.

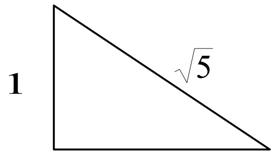


12.

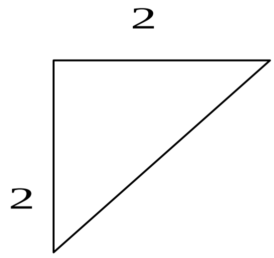


II. Calcular el lado que falta, las seis funciones trigonometricas y los ángulos interiores de los siguientes triángulos.

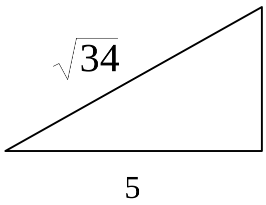
13.



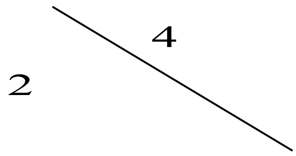
15.



14.



16.



III. Resolver los siguientes problemas.

1. Si un monte tiene una altura de 400 metros y una ladera con 60º de inclinación con respecto a un eje horizontal, ¿Cuántos metros caminara una persona para llegar a la cima?

2. Si una casa va a construirse con el techo inclinado a 15º con respecto a la horizontal, ¿Qué tan alto debe estar una pared con respecto a la otra? La distancia entre paredes es de 4 metros.

3. En un juego de geometría, el lado de una escuadra esta opuesto al ángulo de 60º y mide 3cm. ¿Cuánto miden los otros dos lados de la escuadra?

4. A un poste de 12 metros de altura se le va a reforzar con un cable de acero. Si el gancho para sujetarlo se coloca 5 metros del poste, ¿Cuánto mide el cable de acero? ¿Qué inclinación tiene en grados con respecto a la horizontal?

3.3 Formulas Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales.

$$sen^2\Theta + \cos^2\Theta = 1$$

$$\sec^2\Theta - \tan^2\Theta = 1$$

$$\csc^2\Theta - \cot^2\Theta = 1$$

Formulas de reduccion.

$sen(90° \pm \Theta) = \cos\Theta$	$\cos(90° \pm \Theta) = \mp sen\Theta$	$\tan(90° \pm \Theta) = \mp\cot\Theta$
$sen(180° \pm \Theta) = \mp sen\Theta$	$\cos(180° \pm \Theta) = -\cos\Theta$	$\tan(180° \pm \Theta) = \pm\tan\Theta$
$sen(270° \pm \Theta) = -\cos\Theta$	$\cos(270° \pm \Theta) = \pm sen\Theta$	$\tan(270° \pm \Theta) = \mp\cot\Theta$
$sen(360° \pm \Theta) = \pm sen\Theta$	$\cos(360° \pm \Theta) = \cos\Theta$	$\tan(360° \pm \Theta) = \pm\tan\Theta$

Formulas para suma y resta de ângulos.

$$sen(x \pm y) = senx\cos y \pm \cos xseny$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp senxseny$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\tan y}$$

Formulas para el ángulo doble.

$$sen(2x) = 2senx\cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2 x = 1 - 2sen^2 x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Formulas para la mitad del ángulo.

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1+\cos x)}{2}}$$
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)}{(1+\cos x)}} = \frac{senx}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{senx}$$

3.4 El Alfabeto Griego

(Mayúsculas y minúsculas)

Α	α	alpha	Ι	ι	iota	Ρ	ρ	rho
Β	β	beta	Κ	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	Τ	τ	tau
Δ	δ	delta	Μ	μ	my o mu	Υ	υ	ipsilon
Ε	ε	epsilon	Ν	ν	ny o nu	Φ	φ	fi o phi
Ζ	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	Χ	χ	ji o chi
Η	η	eta	Ο	ο	omicrón	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

4 BIBLIOGRAFÍA

1. **ÁLGEBRA**
   Charles H. Lehmann.
   Ed. Limusa.

5 RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS IMPARES